



Walter Lagemann  
Wolf Rambatz

# Wirtschaftsmathematik und Statistik

Ein Praktikum für die Weiterbildung  
zum Betriebswirt und zur Betriebswirtin

Lehrbuch 2

HERAUSGEBER DR. RUDOLF RÖHR



# Inhaltsverzeichnis

## Teil 2 **Wirtschaftsmathematik**

Walter Lagemann (Abschnitte 2.2 und 2.3)

<b>2.2</b>	<b>Einsatz der Differentialrechnung zur Veranschaulichung und Beurteilung wirtschaftlicher Sachverhalte</b>	27
2.2.1	Grundbegriffe der Differentialrechnung	27
2.2.1.1	Grenzwert	27
2.2.1.1.1	Begriff	27
2.2.1.1.2	Grenzwertberechnungen von Funktionen	34
2.2.1.2	Stetigkeit	35
2.2.1.2.1	Begriff	35
2.2.1.2.2	Stetige Funktionen	36
2.2.1.2.3	Unstetige Funktionen	37
2.2.1.2.4	Funktionen mit zu behebenden Definitionslücken	39
2.2.2	Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen	41
2.2.2.1	Steigung von Funktionen	41
2.2.2.2	Lokale Differenzierbarkeit	43
2.2.2.3	Ableitung einer ganz-rationalen Funktion	46
2.2.2.4	Bestimmung der Grenzkostenfunktion	48
2.2.2.5	Bestimmung der Grenzerlösfunktion	50
2.2.2.6	Bestimmung der Grenzgewinnfunktion	53
2.2.2.7	Bestimmung der Grenzertragsfunktion	56
2.2.3	Ableitungsregeln und Ableitungsfunktionen	59
2.2.3.1	Ableitungsregeln	59
2.2.3.1.1	Potenzregel	59
2.2.3.1.2	Konstanten-Regel	60
2.2.3.1.3	Summenregel	61
2.2.3.1.4	Produktregel	62
2.2.3.1.5	Quotientenregel	63
2.2.3.1.6	Kettenregel	65
2.2.3.2	Ableitungsfunktionen von Stammfunktionen	66
2.2.3.2.1	Ganz-rationale Funktionen	67
2.2.3.2.2	Gebrochen-rationale Funktionen	70
2.2.3.2.3	Wurzelfunktionen	73
2.2.3.2.4	Exponentialfunktionen	74
2.2.3.3	Ableitungsfunktionen von ökonomischen Funktionen	76
2.2.3.3.1	Gesamtkostenfunktion	76
2.2.3.3.2	Gesamterlösfunktion	78
2.2.3.3.3	Gesamtgewinnfunktion	79
2.2.3.3.4	Gesamtertragsfunktion	80
2.2.3.3.5	Konsumfunktion	81
2.2.3.3.6	Sparfunktion	82
2.2.4	Beziehungen zwischen den abgeleiteten Funktionen und den Eigenschaften von Ausgangsfunktionen	86
2.2.4.1	Monotonieverhalten von Funktionen	86
2.2.4.2	Extremwerte von Funktionen	87
2.2.4.3	Krümmungsverhalten von Funktionen	89
2.2.4.4	Wendepunkte von Funktionen	91

2.2.5	Beziehungen zwischen den Eigenschaften von ökonomischen Funktionen und ihren abgeleiteten Funktionen	93
2.2.5.1	Wendepunkt von Gesamtkostenfunktionen	93
2.2.5.2	Hochpunkt von Erlösfunktionen	95
2.2.5.3	Hochpunkt von Gewinnfunktionen	96
2.2.5.4	Hochpunkt von Stückgewinnfunktionen	98
2.2.5.5	Hochpunkt von Ertragsfunktionen	100
2.2.5.6	Tiefpunkt von Grenzkostenfunktionen	102
2.2.5.7	Tiefpunkt von Stückkostenfunktionen	103
2.2.5.8	Beziehungen zwischen Grenzkostenfunktionen und Stückkostenfunktionen	104
2.2.6	Herleiten von Operationsregeln	106
2.2.6.1	Bestimmung von Extremwerten	106
2.2.6.1.1	Bestimmung des Hoch- und des Tiefpunktes einer Funktion	106
2.2.6.1.2	Bestimmung von Maximal- und Minimalwerten ökonomischer Funktionen	106
2.2.6.2	Bestimmung von Wendepunkten	107
2.2.6.2.1	Bestimmung von Wendepunkten einer Funktion	107
2.2.6.2.2	Wendepunktbestimmung von ökonomischen Funktionen	108
2.2.7	Kurvendiskussionsmodelle	108
2.2.7.1	Diskussion einer ganz-rationalen Funktion	109
2.2.7.2	Diskussion einer gebrochen-rationalen Funktion	111
2.2.7.3	Diskussion einer Wurzelfunktion	113
2.2.7.4	Diskussion einer Exponentialfunktion	115
2.2.8	Extremwert- und Wendepunktberechnungen von ökonomischen Funktionen	116
2.2.8.1	Grenzkostenminimum	116
2.2.8.2	Minimum der variablen Stückkosten	117
2.2.8.3	Minimum der gesamten Stückkosten	118
2.2.8.4	Erlösmaximum	120
2.2.8.5	Ertragsmaximum und Wendepunkt der Ertragsfunktion	121
2.2.8.6	Maximum und Wendepunkt der Gewinnfunktion	124
2.2.8.6.1	Berechnungen bei einem festen Verkaufspreis (Modell der vollständigen Konkurrenz – Polypol)	124
2.2.8.6.2	Berechnungen bei einem flexiblen Verkaufspreis (Modell der Monopolsituation)	126
2.2.9	Nicht-lineare Optimierungsmodelle	130
2.2.9.1	Optimale Beschaffungsmenge	130
2.2.9.2	Optimale Losgröße	136
2.2.9.3	Optimale Nutzungsdauer	141
2.2.10	Preiselastizität	145
2.2.11	Extremwertberechnungen von ökonomischen Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen	149
2.2.11.1	Extremwertberechnungen durch Variablensubstitution	150
2.2.11.1.1	Bestimmung der kostenminimalen Faktoreinsatzkombination	150
2.2.11.1.2	Bestimmung der produktionsmaximalen Faktoreinsatzkombination	151
2.2.11.2	Extremwertberechnungen mit der partiellen Differentiation	153
2.2.11.2.1	Einführung in die partielle Differentiation	153
2.2.11.2.2	Extremwertbedingungen	155
2.2.11.2.3	Extremwertberechnungen	156
2.2.11.3	Extremwertberechnungen mit dem Lagrange-Multiplikator	157

<b>2.3</b>	<b>Finanzmathematik</b>	163
2.3.1	Zinseszinsrechnung	163
2.3.1.1	Begriffe	163
2.3.1.2	Entwicklung der Kapitalendwertformel ( $K_n$ ) bei jährlicher Verzinsung	163
2.3.1.3	Modellfälle (einmalige Kapitaleistungen) und ihre Lösung mit Hilfe der $K_n$ -Formel (Standardformel)	165
2.3.1.3.1	Kapitalendwert bei einem bestimmten und einem veränderten Zinssatz	165
2.3.1.3.2	Kapitalbarwert bei einem bestimmten und einem veränderten Zinssatz	166
2.3.1.3.3	Bestimmung der Laufzeit bei einem bestimmten und einem veränderten Zinssatz	167
2.3.1.3.4	Bestimmung des Zinssatzes	168
2.3.1.4	Bestimmungsmethoden des Endwertes von mehreren Kapitalien	169
2.3.1.4.1	Ereignismethode	169
2.3.1.4.2	Einzelwertmethode	171
2.3.1.5	Veränderung der Endwertformel ( $K_n$ )	171
2.3.1.5.1	Unterjährige Verzinsung	171
2.3.1.5.2	Stetige Verzinsung	173
2.3.2	Abschreibungsverfahren	175
2.3.2.1	Begriffe	175
2.3.2.2	Abschreibungsbeträge und Restwerte bei linearer Abschreibung	175
2.3.2.3	Abschreibungsbeträge und Restwerte bei geometrisch-degressiver Abschreibung	177
2.3.2.4	Abschreibungspläne bei linearer und geometrisch-degressiver Abschreibung	182
2.3.2.5	Optimaler Übergangzeitpunkt beim Wechsel von degressiver zu linearer Abschreibung	184
2.3.3	Rentenrechnung	186
2.3.3.1	Begriffe	187
2.3.3.2	Entwicklung der Summenwertformeln (Kapitalendwert von Renten)	187
2.3.3.3	Modellfälle und ihre Lösung mit Hilfe der Standardformeln	191
2.3.3.4	Rentenberechnungen mit Summenwert- und Zinseszinsformel	200
2.3.3.5	Veränderung der Summenwertformeln	204
2.3.3.6	Kapitalaufbau	213
2.3.3.7	Kapitalabbau	215
2.3.4	Tilgungsrechnung	216
2.3.4.1	Grundbegriffe	217
2.3.4.2	Ratentilgung	217
2.3.4.2.1	Jährliche Ratentilgung	217
2.3.4.2.2	Unterjährige Ratentilgung	221
2.3.4.3	Annuitätentilgung	225

## Teil 3 **Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Walter Lagemann (Abschnitte 3.1 – 3.4)

<b>3.1</b>	<b>Grundbegriffe, Methoden und Bereiche der Statistik</b>	237
3.1.1	Grundbegriffe	237
3.1.2	Methoden	240
3.1.3	Bereiche	243
<b>3.2</b>	<b>Deskriptive Statistik</b>	244
3.2.1	Darstellungsformen und Häufigkeitsverteilung von statistischen Daten	244
3.2.1.1	Tabellarische Darstellung	244
3.2.1.1.1	Daten ohne Klassenbildung	244
3.2.1.1.2	Daten mit Klassenbildung	247
3.2.1.1.3	Aufsummierte Häufigkeiten	249
3.2.1.1.4	Relative Häufigkeiten	251
3.2.1.2	Graphische Darstellung	253
3.2.1.2.1	Graphische Darstellungsarten	253
3.2.1.2.2	Aufsummierte Häufigkeiten	259
3.2.1.2.3	Konzentrationskurve	260
3.2.1.2.4	ABC-Analyse	262
3.2.1.3	Charakterisierung der Häufigkeitsverteilung von statistischen Daten	264
3.2.1.3.1	Häufigkeitsverteilung der dargestellten Massen	264
3.2.1.3.2	Normalverteilung	264
3.2.1.3.3	Gaußsche Verteilungskurve	265
3.2.1.3.4	Häufigkeitsverteilung von Experimenten und Stichproben	266
3.2.2	Charakterisieren von statistischen Daten durch Maßzahlen	271
3.2.2.1	Mittelwerte	272
3.2.2.1.1	Median	272
3.2.2.1.2	Quartile	275
3.2.2.1.3	Modus	276
3.2.2.1.4	Einfacher arithmetischer Mittelwert	277
3.2.2.1.5	Gewogener arithmetischer Mittelwert	278
3.2.2.2	Streuungsmaße	280
3.2.2.2.1	Spannweite	280
3.2.2.2.2	Mittlerer Quartilsabstand	281
3.2.2.2.3	Durchschnittliche Abweichung	281
3.2.2.2.4	Standardabweichung und Variationskoeffizient	283
3.2.2.3	Bestimmung der Maßzahlen mit dem elektronischen Taschenrechner und dem Computer	287
3.2.2.3.1	Bestimmung der Maßzahlen mit dem Taschenrechner	287
3.2.2.3.2	Bestimmung der Maßzahlen mit dem Computer	289
3.2.2.4	Standardisierte Normalverteilung und ihre Bedeutung	290
3.2.2.4.1	Normalverteilung, Mittelwert und Standardabweichung	290
3.2.2.4.2	Bedeutung der standardisierten Normalverteilung	290
3.2.3	Zeitreihenanalyse	294
3.2.3.1	Darstellung und Komponenten von Zeitreihen	294
3.2.3.2	Trendbestimmungsmethoden	295
3.2.3.2.1	Methode der gleitenden Durchschnitte	295
3.2.3.2.2	Methode der kleinsten Quadrate	297
3.2.3.3	Indexzahlen	300
3.2.3.3.1	Begriff Index und Bedeutung von Indexzahlen	300
3.2.3.3.2	Preis-, Mengen- und Wertmessziffern	301

3.2.3.3.3	Mengenindices	302
3.2.3.3.4	Preisindices	304
3.2.3.3.5	Wertindices	306
3.2.4	Beziehungsanalyse	306
3.2.4.1	Regressionsanalyse	307
3.2.4.2	Korrelationsanalyse	312
<b>3.3</b>	<b>Stichprobentheorie und Stichprobenpraxis</b>	<b>314</b>
3.3.1	Gegenstand der Stichprobentheorie	314
3.3.2	Bedeutung des Stichprobenverfahrens in der Praxis	314
3.3.3	Anforderungen an die Stichprobenauswahl	315
3.3.4	Statistische Sicherheit und Genauigkeitsgrad einer Stichprobe	317
3.3.5	Vertrauensbereiche	321
3.3.5.1	Vertrauensgrenzen des Mittelwertes und der Standardabweichung einer Grundgesamtheit	321
3.3.5.2	Vertrauensgrenzen von Anteilen einer Grundgesamtheit	323
3.3.5.3	Berechnungstabellen	326
<b>3.4</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>329</b>
3.4.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	329
3.4.1.1	Zufallsexperiment	329
3.4.1.2	Ergebnismenge von Zufallsexperimenten	330
3.4.1.3	Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge	331
3.4.1.4	Relationen und Verknüpfungen von Ereignissen	333
3.4.1.5	Baumdiagramm	334
3.4.2	Relative Häufigkeit von Ereignissen	335
3.4.3	Methoden zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit	336
3.4.3.1	Statistische Methode	336
3.4.3.2	Mathematische Methoden	337
3.4.3.2.1	Axiomatische Definition nach Kolmogorow	337
3.4.3.2.2	Klassische Definition nach Laplace	340
3.4.4	Begriffe und Berechnungen aus der Kombinatorik	342
3.4.4.1	Permutationen	342
3.4.4.2	Variationen	346
3.4.4.3	Kombinationen	349
3.4.5	Kombinatorische Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten	353
3.4.6	Bedingte Wahrscheinlichkeit	357
3.4.7	Unabhängigkeit von Ereignissen	359
3.4.8	Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung	362
	<b>Formeln, Regeln und Definitionen</b>	<b>369</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>381</b>